⋆ ⋆

Exercice 1

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) Exprimer A^2 en fonction de A et I, et en déduire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
   b) Montrer que si λ est une valeur propre de A alors λ est racine de P.
   c) En déduire les valeurs propres possibles de A puis montrer que A est diagonalisable.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble T_n des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$.
- A admet la valeurs propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2) L'ensemble T_n, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?
3) Montrer que le produit de deux matrices de T_n est une matrice de T_n.
4) Soit A un élément de T_n et λ une valeur propre de A.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ, pour lequel il existe un entier k de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.
   b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.
5) Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de T_n sont tous strictement supérieur à $1/2$, la matrice A est inversible.

⋆ ⋆

Exercice 2

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = -M$.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2) a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4) a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5) a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.
   b) En déduire les valeurs propres de f.
   c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{Id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

⋆ ⋆
Exercice 3

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Prérequis

1) Montrer que si M est une matrice carrée d'ordre n et P est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre λ de M vérifie $P(\lambda) = 0$.

Partie 1 : Étude de A

2) Calculer A^2 et A^3 et vérifier que $A^3 = 2A$.
3) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
4) Déterminer les valeurs propres de A, puis montrer que A est diagonalisable (on précisera une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie 2 : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
2) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

3) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
4) Déterminer la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
5) a) Montrer que $f \circ f \circ f = 2f$.
   b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres de f.
6) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Diagonalisable ?
7) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
8) a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$ d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
   b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$ d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Le but de cet exercice est de montrer qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe p nombres $r_1, \ldots, r_p$ réels distincts tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.

1) Soient g et h deux endomorphismes de E. Soit alors l'application *varphi* : $\mathrm{Ker}(g \circ h) \to E$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(g \circ h), \quad \varphi(x) = h(x)$$

   a) Comparer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.
   b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

On considère désormais un endomorphisme f de E

2) On suppose que f est diagonalisable. Montrer qu'il existe p nombres $r_1, \ldots, r_p$ réels distincts (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
3) Réciproquement, on suppose qu'il existe p nombres $r_1, \ldots, r_p$ réels distincts (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
   a) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(f - r_i \mathrm{Id}_E)) \geqslant n$.
   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) **Application :** On suppose que f est diagonalisable. Montrer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors l'endomorphisme $f_{|}E_0$ de E_0 induit par f est, lui aussi, diagonalisable.